Inference at $*$ 1 0
of proof for Lemma trans_functionality_wrt_iff:

1. T : Type
2. R : $T \to T \to \mathbb{P}$
3. R' : $T \to T \to \mathbb{P}$
4. $\forall x,\, y{:}T.\ R(x,y) \iff R'(x,y)$

$\vdash$ $(\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R(b,a) \Rightarrow R(c,b) \Rightarrow R(c,a))$
$\iff (\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a))$
by PERMUTE{1:n,
2:n,
2:n,
2:n,
3:n,
3:n,
4:n,
5:n,
6:n,
7:n,
7:n,
8:n,
9:n,
10:n,
11:n,
11:n,
12:n,
13:n,
14:n,
15:n,
16:n,
17:n,
18:n,
19:n,
20:n,
21:n,
22:n,
23:n,
24:n,
25:n,
19:n,
25:n,
20:n,
11:n,
7:n,

3:n,
26:n,
27:n}

1: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ R(b,a) \Rightarrow R(c,b) \Rightarrow R(c,a)) \in \mathbb{P}$
2: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a)) \in \mathbb{P}$
3: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash T \in \mathrm{Type}$
4: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b,\ c{:}T.\ R(b,a) \Rightarrow R(c,b) \Rightarrow R(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
5: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b,\ c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
6: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash T = T$
7: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
$\vdash T \in \mathrm{Type}$
8: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
$\vdash (\lambda b.\forall c{:}T.\ R(b,a) \Rightarrow R(c,b) \Rightarrow R(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
9: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
$\vdash (\lambda b.\forall c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
10: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
$\vdash T = T$
11: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. T
$\vdash T \in \mathrm{Type}$
12: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$

6. $b : T$
$\vdash (\lambda c.R(b,a) \Rightarrow R(c,b) \Rightarrow R(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
13: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. $b : T$
$\vdash (\lambda c.R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
14: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. T
$\vdash T = T$
15: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. $b : T$
7. T
$\vdash R(b,a) \in \mathbb{P}$
16: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. $b : T$
7. T
$\vdash R'(b,a) \in \mathbb{P}$
17: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. $b : T$
7. $c : T$
$\vdash (R(c,b) \Rightarrow R(c,a)) \in \mathbb{P}$
18: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. $b : T$
7. $c : T$
$\vdash (R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a)) \in \mathbb{P}$
19: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. $b : T$
7. T
$\vdash b \in T$
20: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. T

7. T
$\vdash a \in T$
21: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. $b : T$
7. $c : T$
$\vdash R(c,b) \in \mathbb{P}$
22: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. $b : T$
7. $c : T$
$\vdash R'(c,b) \in \mathbb{P}$
23: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. T
7. $c : T$
$\vdash R(c,a) \in \mathbb{P}$
24: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. $a : T$
6. T
7. $c : T$
$\vdash R'(c,a) \in \mathbb{P}$
25: . . . . .wf. . . . . NILNIL

5. T
6. T
7. $c : T$
$\vdash c \in T$
26: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a))$
$=$
$(\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a))$
27:

$\vdash (\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a))$
$\iff (\forall a,\, b,\, c{:}T.\ R'(b,a) \Rightarrow R'(c,b) \Rightarrow R'(c,a))$
.

---

http://www.nuprl.org/FDLcontent/p0_942988_/p121_82113_{trans_functionality_wrt_iff}1_0.html